Le problème comporte quatre parties qui sont, dans une large mesure, indépendantes entre elles. Le soin apporté aux calculs à effectuer, ainsi que la rigueur du raisonnement seront des éléments très importants d'appréciation.

PREMIERE PARTIE

On considère le plan affine euclidien E orienté par la donnée d'un repère orthonormé direct $R = (O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit C le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère une corde du cercle C, d'extrémités A et B, dont la positio est aléatoire ; on note par L la variable aléatoire égale à la distance de à cette corde : L étant une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ et prenant ses valeurs dans $[0, 1]$.

1°) On suppose dans cette question que L suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Préciser la fonction de répartition F_1 de L et la représenter graphiquement.

b) Calculer l'espérance mathématique de L et sa variance.

2°) On considère θ la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}})$ prise dans $[0, 2\pi[$.

a) Exprimer la distance de O à la corde AB en fonction de θ.

b) Si on suppose maintenant que θ est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega_1, \mathbf{B}_1, P_1)$ suivant une loi uniforme sur $[0, 2\pi[$ notons encore L la variable aléatoire, égale à la distance de O à une corde, définie à partir de θ.

i/ Donner la fonction de répartition F_2 de L dans ce cas, et montrer qu'elle admet comme densité (généralisée) la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

ii/ Représenter graphiquement g et F_2.

iii/ Montrer que L admet des moments de tout ordre, c'est-à-dire que

$$m_k = \int_0^1 x^k . g(x)dx \quad \text{existe pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

* Calculer m_0 et m_1.

** Donner une relation entre m_{k+2} et m_k, en déduire m_{2k} et m_{2k+1} pour $k \in \mathbf{N}$.

***Montrer que $\lim_{k \to +\infty} \frac{m_k}{m_{k+1}} = 1$; puis, après avoir étudié la suite $(S_k)_{k \in \mathbf{N}}$ définie par $S_k = (k+1)\, m_k . m_{k+1}$, donner un équivalent sim de m_k lorsque k tend vers $+\infty$.

3°) Donner dans chacun des deux cas envisagés précédemment pour la loi de L, la probabilité pour que la longueur de la corde aléatoire AB soit plus grande que la longueur du côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle C dans le cas où : n = 3 (triangle équilatéral), n = 4 (carré), n = 6 (hexagone) et, de façon générale, en considérant les racines de l'unité sur le cercle unité dans le plan complexe, n quelconque, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$.

DEUXIEME PARTIE

Soit Y une variable aléatoire continue définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_1, \mathbf{B}_1, P_1)$ et admettant comme densité (généralisée) la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

1°) Calculer l'espérance et la variance de Y.

2°) Soit $Z = |Y|$ $(\omega \longmapsto |Y(\omega)|)$. Préciser une densité de Z, son espérance et sa variance.

3°) On désigne par M_k, pour $k \in \mathbf{N}$, le moment d'ordre k de Y (c'est-à-dire :

$$M_k = \int_{-1}^{+1} x^k . f(x)\, dx).$$

a) Montrer l'existence de M_k, et préciser la valeur des moments d'ordre impair.

b) En recherchant éventuellement une relation entre M_{2k+2} et M_{2k} pour $k \in \mathbf{N}$ donner la valeur de M_{2k} pour $k \in \mathbf{N}$.

4°) On considère la série entière de terme général : $(x \in \mathbf{R})$:

$$u_{2k+1}(x) = 0 \ ; \quad u_{2k}(x) = (-1)^k . \frac{M_{2k}}{(2k)!} . x^{2k} \quad \text{pour } k \in \mathbf{N}$$

a) Préciser le rayon de convergence de la série entière

$$J(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x).$$

b) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $x \longmapsto \cos x$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad J(x) = \frac{2}{\pi} . \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta).d\theta$$

c) Etudier la différentiabilité sur $\mathbf{R}^2$ de $(x,\theta) \longmapsto \cos(x \sin \theta)$.

d) Soient $(x, x_0) \in \mathbf{R}^2$ avec $x \neq x_0$, et

.../...

ECOLE SUPERIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATERIAUX (UNIVERSITE D'ORLEANS)
Option C MATHEMATIQUES (4 h)
1984
P 206

$$F(x) = \frac{J(x) - J(x_0)}{x - x_0} + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(x_0 \sin\theta) \sin\theta \, . \, d\theta$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $|F(x)| \leq |x - x_0|$; en déduire que J est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad J'(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\theta . \sin(x \sin\theta) . d\theta .$$

e) On peut montrer de même, et nous l'admettrons, que J' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad J''(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta . \cos(x \sin\theta) \, d\theta$$

Montrer alors que J est solution de l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

TROISIEME PARTIE

On considère la fonction numérique h définie sur $[0, 1]$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1°) h est-elle : - continue sur $[0, 1]$?
- dérivable sur $]0, 1[$? sur $[0,1[$? sur $[0, 1$

2°) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0,1] \quad |h(x)| \leq a$

3°) Pour $x \in]0, 1[$, on pose $s(x) = \sqrt{1-x} \, . \, h'(x)$.

Après avoir étudié brièvement s, montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel qu

$$\forall x \in [0, 1[\qquad |h'(x)| \leq \frac{b}{\sqrt{1-x}}$$

4°) a) Montrer l'existence de $A(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{2(1-t)}} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) En effectuant le changement de variable $t = 1 - \frac{y^2}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ f ($y = \sqrt{x} \, . \, \sqrt{1-t}$), montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad A(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2}{x}} \cdot \int_0^{\sqrt{x}} [\cos x \cos(y^2) + \sin x \sin$$

c) Montrer la convergence des intégrales de Fresnel :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \cos(y^2) \, dy \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \sin(y^2) \, dy ;$$

(pour cela, on pourra utiliser le changement de variable $t = y^2$ et intégrer par parties dans les intégrales

$$\int_1^T \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \quad \text{ou} \quad \int_1^T \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \qquad \text{avec } T > 1 \ldots)$$

On admettra pour la suite que $I_1 = I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

d) En déduire qu'on peut trouver une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, tendant vers 0 en $+\infty$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad A(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi . x}} \cdot \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \varepsilon(x)\right]$$

5°) Montrer l'existence de $B(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos(xt) \, h(t) \, dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En intégrant par parties, et en tenant compte des inégalités obtenues au 2°) et au 3°), montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{\frac{\pi x}{2}} \, . \, B(x)\right] = 0$$

6°) En remarquant que $J(x) = A(x) + B(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, (J étant définie au 4°) de la deuxième partie), montrer qu'on peut trouver une fonction $\varepsilon_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad J(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \, . \, \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \varepsilon_1(x)\right]$$

QUATRIEME PARTIE

On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout couple (S,T) de polynômes de V, on associe :

$$\langle S,T \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{S(x) \, T(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

1°) Montrer l'existence de $\langle S, T \rangle$, et montrer que pour tout $S \in V$, $\langle S,S \rangle = 0$ équivaut à $S = 0$.

2°) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_k tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos(kx) = T_k(\cos x)$$

3°) Calculer, pour tout $(k,h) \in \mathbb{N}^2$, $k \leq n$, $h \leq n$, la valeur de $\langle T_k, T_h \rangle$.

Quelle est la signification du résultat obtenu et que peut-on en déduire pour la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$?

XXX